Modell-Weil Lattices for Higher Genus Fibrations

Shiota, T.

Mordell-Weil Lattices for Higher Genus Fibration

立教大理 塩田徹治
(T. Shioda)

約3年前の城崎でのシンポジウムにおいて、"Mordell-Weil Lattices とその応用"と題して、楕円曲面の場合のMWLの定義と基本的性質、及び若干の応用について述べた。今回の主題は、fibre を楕円曲線の代りに、任意の種数 $g \geq 1$ の代数曲線としたときにも、その Jacobian の Mordell-Weil 群に格子の構造が自然に入ること、そしてそれが仲々面白い応用をもつこと、である。

これらの結果は、標題と同じ title の小文[S6]で学士院紀要から発表する予定だが、詳細は準備中である。本稿においても、idea を中心にして、証明の詳細は割愛させて頂く。(基本的な idea は楕円曲線 $(g=1)$ の時と同じであるから、その場合の知識は有用であろう);それについての survey が3種ある:イ)初期のスケッチ[S1]、ロ)一段落[S3]、ハ)日本語[S4]。より詳しくは[S2]、又はこれらの文献表参照。

記号

k：代数的閉体，標数は任意

$K=k(C)$：代数曲線 C の関数体，e.g. $K=k(t)$.

Γ/K：種数 $g\geq 1$ の代数曲線(n.s. proj.)

$\Gamma(K)$：Γ の K-有理点の集合，$\neq\phi$，$\ni O$ とする.

J/K：Γ/K の Jacobi 多様体；$\Gamma \hookrightarrow J$，O=原点.

$J(K)$：J の K-有理点の群.

1.

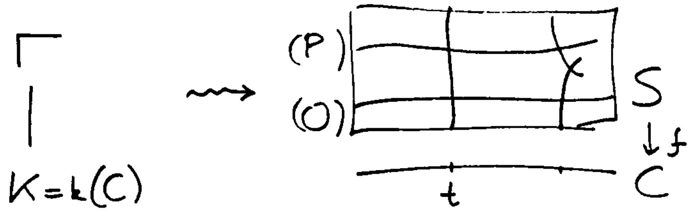
まず関数体上の場合の Mordell-Weil の定理は，Néron, Lang により証明されたが，次の様に述べられる：

K 上の abel 多様体 A の K/k-trace を (B,τ) とすると，$A(K)/\tau B(k)$ は有限生成 abel 群である。([L]).

ここで K/k-trace の定義は次の通り：B は k 上の abel 多様体，$\tau: B\to A$ は K 上定義された homomorphism，であって，次の universal mapping property をもつ．Bps $\forall(B',\tau')$，$\tau': B' \xrightarrow[K]{} A$ に対し，$\exists!\, u: B'\xrightarrow[k]{} B$ s.t. $\tau'=\tau\circ u$.

$A=J$ の場合，有限生成な群 $J(K)/\tau B(k)$ は，F の Th.1 のように，より直接的，幾何学的な対象と関係付けられる。まず，Γ/K に対応して，代数曲面 S と fibration f が自然に定義される.

$$f: S \longrightarrow C$$



ここで、S は nonsing. projective, f は generic fibre を Γ/K とする relatively minimal な fibration (i.e. $\forall f^{-1}(t)$ 中 ∄ 1種例外曲線) である。その際、Γ(K) ∋ P は、f の section (P) と 1:1 に対応する。さらに、S 上の divisor D が与えられたとき、Γ 上の 0次の divisor

$$\delta = D\cdot\Gamma - d[O] \quad , \ d=(D\cdot\Gamma)\in\mathbb{Z}$$

を考えることにより、準同型

$$\mathrm{Div}(S)\ni D \longmapsto \mathrm{class}(\delta)\in J(K)$$

が定まる。容易に分かるように、これは全射で、準同型

$$\mathrm{Pic}(S) \longrightarrow J(K)$$

をひきおこす。さて、S の Néron–Severi 群は

$$NS(S) = \mathrm{Div}(S)/\mathrm{alg.equiv.} = \mathrm{Pic}(S)/\mathrm{PicVar}(S)$$

として定義され、一般に有限生成な abel 群になることが知られているが、考えている場合 次の定理が成立つ。

<u>Th.1</u> 上の準同型は、自然な同型

$$NS(S)/T \simeq J(\Gamma)/\tau B(k)$$

をひきおこす。T は、(O), F (=fibre) 及び可約 fibre の既約成分で生成される NS(S) の部分群である。さらに、

代数曲面 S の Picard 多様体は，C の Jacobi 多様体と J の K/k-trace B の直和に同型である：

$$\mathrm{PicVar}(S) \simeq \mathrm{Jac}(C) \oplus B. \qquad \lrcorner$$

この結果は，たとえば [L] にある知識を仮定すれば証明は難しくない（従って，1960年頃に知られていても不思議はない）のであるが，意外にも，上のような定式化をした文献を私は知らない。特別な場合として，

<u>Th.2</u>　Γ/K, J/K, ‥ は上の通りとし，さらに

(*) J の K/k-trace $= \{0\}$，と仮定すると，

$$NS(S)/T \simeq J(K), \quad \text{とくに } J(K) \text{ は有限生成},$$
$$\mathrm{PicVar}(S) \simeq \mathrm{Jac}(C). \qquad \lrcorner$$

<u>Th.3</u>　$\mathrm{PicVar}(S) = \{0\}$ ならば（たとえば，S が有理曲面，K3曲面，より一般に $b_1(S) = 0$ ならば），(*) が成立ち，従って，$NS(S)/T \simeq J(K)$. $\lrcorner$

<u>注意</u>．$g = 1$ (elliptic fibration) のとき，条件 (*) と，条件

(*') $f: S \to C$ は singular fibre をもつ，又は

(*'') j-invariant of Γ は const. でない ($j \notin k$).

の関係は，$(*'') \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} (*') \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} (*)$ ；$C = \mathbb{P}^1$ のときは $(*) \Leftrightarrow (*')$.

2.

以上が Mordell-Weil 群と Néron-Severi 群の群としての関係であるが、曲面上の交点理論を用いて、Mordell-Weil 群に格子(lattice)の構造をいれて、Mordell-Weil lattice (MWL) を定義してみよう。

簡単のため、以下の議論では、次の2条件を仮定する：

$$\begin{cases} (*) & K/k\text{-trace of } J = \{0\}. \\ (**) & NS(S) \text{ は torsion-free.} \end{cases}$$

(たとえば、S が有理曲面、K3, etc なら、自動的に満たされる条件である。) (*)より $J(K)$ は有限生成である。

方針は、$g=1$ の場合 (cf. [S1], [S2], …) と同様、Th.2 の同型 $NS(S)/T \simeq J(K)$ を split することである：

<u>Lemma</u> $J(K)$ から $NS(S)\otimes\mathbb{Q}$ への map φ で、

$$\begin{cases} \varphi(P) \equiv D_P \mod T\otimes\mathbb{Q}, & \forall P \in J(K) \\ \varphi(P) \perp T & (\text{w.r.t. intersection pairing}) \end{cases}$$

を満たすものが唯一つ存在する。ここに、D_P ($\in NS(S)$) は、$P \in J(K)$ に対し、$D_P \bmod T \leftrightarrow P$ となる S 上の divisor である (1つとって fix)。よって、φ は、群準同型となり、

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = J(K)_{tor}, \quad \mathrm{Im}(\varphi) \subset T^{\perp}\otimes\mathbb{Q}. \qquad \lrcorner$$

さて、(**)より $NS(S)$ は integral lattice となり、その signature は $(1, \rho-1)$ (Hodge index th.)。

$\rho = \mathrm{rk}\, NS(S)$ は S の Picard 数。一方, T は $NS(S)$ の sublattice となり("trivial sublattice" とよぶ), 次のように分解される:

$$T = U \oplus \bigoplus_{v \in R} T_v$$

ここに U は (O), F で生成される $\mathrm{rk}=2$ の unimodular lattice, T_v は可約 fibre $f^{-1}(v)$ の既約成分 $\Theta_{v,i}$ で $((O)\cdot\Theta_{v,i})=0$ なるものから生成される negative-definite な lattice, $R = \{v \mid f^{-1}(v)\ 可約\}$ である。$\det U = \begin{vmatrix} \ast & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$ だから, Hodge index により $L = T^{\perp}$ は neg.-def. である。

以上から, 次の Th-Def. は明らかであろう:

<u>Th.4</u> $P, Q \in J(K)$ に対し

$$\langle P, Q \rangle = -(\varphi(P)\cdot\varphi(Q)) \in \mathbb{Q}$$

と定義すると, $(J(K)/\mathrm{tor}), \langle\, , \rangle)$ は pos.-def. lattice となる。これを J/K の <u>Mordell-Weil lattice</u> という。

$g=1$ の時と同様, $\varphi(P)$ は explicit な表示ができるので, 上の <u>height pairing</u> $\langle\, , \rangle$ も具体的に書ける: たとえば, $P, Q \in \Gamma(K) \subset J(K)$ に対し

$$\langle P, Q \rangle = -(O^2) - (PQ) + (PO) + (QO) - \sum_{v \in R} \mathrm{contr}_v(P, Q)$$

ここで (PQ) は, S 内の曲線 (P) と (Q) の交点数, $(O^2) = (OO)$, $\mathrm{contr}_v(P,Q) \in \mathbb{Q}$ は "local contribution" (cf. [S2]).

次に $J(K)$ の部分群 $J(K)^0$ を

$$T^{\perp} \hookrightarrow NS(S) \longrightarrow NS(S)/T \simeq J(K)$$

の像として定義する。

<u>Th.5</u> $J(K)^0$ は torsionfree で $(J(K)^0, \langle , \rangle)$ は integral lattice となる；これを <u>narrow Mordell-Weil lattice</u> とよぶ。

$$(J(K)^0, \langle , \rangle) \simeq (T^{\perp}, -(\cdot)).$$

$P \in J(K)^0$ とすると、$\mathrm{contr}_v(P, Q) = 0$ for $\forall Q \in J(K)$.
従って $\langle P, Q \rangle \in \mathbb{Z}$ だから、一般の MWL は narrow MWL の dual lattice に含まれる。特別だが重要な場合として、次のことが成立。

<u>Th.6</u> 条件 (*), (**) に加えて、$NS(S)$ が unimodular な lattice とする。Eps $\det NS(S) = \pm 1$。このとき、MWL $(J(K)/(\mathrm{tor}), \langle , \rangle)$ は、narrow MWL $J(K)^0$ の dual lattice に同型である。

たとえば

<u>Th.7</u> S が有理曲面ならば、Th.6 の全ての条件が満たされ、従って J/K の MWL は、その narrow MWL の dual lattice に同型。

3.

さて、特異点の理論に登場する所謂 "Milnor lattice" は、適当な場合には、Mordell-Weil lattice の観点からより精密に捉えられる。たとえば、

$$E_6\text{-sing.} \quad y^2 = x^3 + t^4$$
$$E_7\text{-sing.} \quad y^2 = x^3 + x t^3$$
$$E_8\text{-sing} \quad y^2 = x^3 + t^5$$

の "semi-universal deformation" を与える方程式を、

$$(E_6) \ : \ y^2 = x^3 + t^4 + x\Big(\sum_0^2 p_i t^i\Big) + \Big(\sum_0^2 q_j t^j\Big)$$
$$(E_7) \ : \ y^2 = x^3 + x t^3 + x(p_0 + p_1 t) + \sum_0^4 q_j t^j$$
$$(E_8) \ : \ y^2 = x^3 + t^5 + x\Big(\sum_0^3 p_i t^i\Big) + \Big(\sum_0^3 q_j t^j\Big)$$
$$\lambda = (p_i, q_j) \in \mathbb{A}^r \qquad (r = 6, 7, 8)$$

は、$k = \overline{\mathbb{Q}(\lambda)}$ (alg. closure) とするとき、$k(t)$ 上の楕円曲線 $E = E_\lambda$ を定めるが、generic な λ に対して、MWL $E(k(t))$ は、root lattice E_r の dual lattice E_r^* と同型になり、$Gal(k/\mathbb{Q}(\lambda))$ の $E(k(t))$ 上の表現（あるいは narrow MWL $E(k(t))^0 \simeq E_r$ 上の表現）は、Milnor lattice 上の monodromy 表現と本質的に同じである。

E型以外の、A, D型の rational double points の semi-universal deformation を与える方程式は、一般には種数の高い hyperelliptic curve を定める。その場合にも上と同

様なことが成立していると期待するのは自然なことである。実際，それを確めることは，MWLの理論を高い種数の場合に拡張する一つの動機となっている (cf. [S8], 序文)．

さて，A_n型の特異点を $y^2 = x^{n+1}+t^2$ と表すとき，その univ. deform. の式は

$$y^2 = x^{n+1} + p_2 x^{n-1} + p_3 x^{n-2} + \cdots + p_{n+1} + t^2,$$
$$\lambda = (p_2, p_3, \ldots, p_{n+1}) \in \mathbb{A}^n .$$

簡単のため，$n = 2g$ が偶数のときを考える。上式は，種数 g の hyperell. curve $\Gamma = \Gamma_\lambda / K = k(t)$ とみなされる。$O \in \Gamma(K)$ を"無限遠点"とし，Γ をその Jacobian J に，$O = J$ の原点となるようにうめこむ。Γ は次の有理点

$$P_i = (u_i, t) \quad , \quad P_i' = (u_i, -t) \quad (1 \le i \le 2g+1)$$

をもつ。ここに $u_1, \ldots, u_{2g+1}$ は，方程式

$$x^{2g+1} + p_2 x^{2g-1} + \cdots + p_{2g+1} = 0$$

の根。これらは，$\Gamma(K) \subset J(K)$ の中で，次をみたす

$$\sum_{i=1}^{2g+1} P_i = 0 \quad , \quad P_i' = -P_i .$$

<u>Th. 8</u>　$u_1, \ldots, u_{2g+1}$ が互いに独立と仮定すると，$J(K)$ は，rank $r = 2g$ の free abel 群となる。より詳しく，narrow MWL $J(K)^0 \cong A_{2g}$ (root lattice)，$J(K) \cong A_{2g}^*$ と，格子として同型になる：

$$\begin{array}{ccc} J(K) & \simeq & A_{2g}^{*} \\ \cup & & \cup \quad \text{index } 2g+1 \\ J(K)^{0} & \simeq & A_{2g} \end{array}$$

更に、$P_1,\cdots,P_{2g+1}$, $P_1',\cdots,P_{2g+1}'$ の $2(2g+1)$ コの点は、A_{2g}^{*} の minimal vectors (norm $= \frac{2g}{2g+1}$) に対応する。特に、$P_1,\cdots,P_{2g}$ は $J(K)$ の生成元となる。」

証明は、まず Γ/K に対応する代数曲面 S が、有理曲面になることに注意し、Th. 7 を適用する。$f: S\to\mathbb{P}^1$ は、$t=\infty$ が唯1つの可約 fibre である。(特異点の除去を実行することにより)

$$\mathrm{rk}\, T_\infty = 2g+4 \quad , \det T_\infty = 2g+1$$

であることが分る。これから $r=2g$, $\det J(K) = \frac{1}{2g+1}$.

一方、height pairing の explicit formula を用いて、$\langle P_i, P_j\rangle$ を計算し、これが A_{2g}^{*} の min. vector の $\langle\,,\,\rangle$ と同じであることを確める。これで全て証明される。

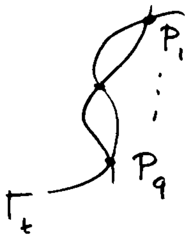
N.B.

n が奇数のときは、少し様子が違う。MWL として、root lattice A_n は出てこない。しかし、その lattice は完全に決定できる。又、n が偶数の時とちがって、パラメタ λ の値によって、色々な形の lattice が出てくる。例えば $y^2 = x^{2g+2}+1+t^2$ なら、$J(K)\simeq A_g^{*}\oplus A_g^{*}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$、等々。

4.

もう一つの著しい応用として、Manin-Shafarevich の結果の一般化を与える。

$\mathbb{P}^2$ 内の3次曲線の linear system $\{\Gamma_t \mid t\in\mathbb{P}^1\}$ を考えると、



Bezout Th. により、base points は一般に9つある。今、これら $\{P_i\}$ が互いに相異なり、かつ、どの member Γ_t も既約となる場合を考えると、M-S は次のことを主張する。

「この lin. system の generic member を $K=k(t)$ 上の ell. curve $E=\Gamma_t$ とみなし、$P_i\in E(K)$ の1つ、たとえば $P_9=0$ ととると、残りの $P_1,\cdots,P_8$ は $E(K)$ 内で独立で、かつ $E(K)$ の index 3 の部分群を生成する。」

[M1] によれば、$P_1,\dots,P_8$ の独立性は Shafarevich による; "index 3" は [M2] で証明された。我々は MWL の理論の応用として、3年前の成果や [S2] で、これの簡明な証明を与えた。

MWL の概念を、高い種数まで拡張してみると、この証明は直ちに、次の定理に適用できることが分かる。(尤も、この定理の statement 自体、又は予想として、以前から知られたものか否か私は知らない。御存知の方は教えて頂けると幸いである。)

Th.9　$m \geq 3$ とし，$\{\Gamma_t \mid t \in \mathbb{P}^1\}$ を，$\mathbb{P}^2$ 内の m 次曲線のなす linear pencil で，次の2条件をみたすものとする。

(A1) 各 Γ_t は既約，generic な Γ_t は nonsingular.

(A2) m^2 コの base points $\{P_i\}$ は，互いに相異なる.

このとき，generic member $\Gamma = \Gamma_t$ は，$K = k(t)$ 上の種数 $g = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) \geq 1$ の曲線であるが，その Jacobian を J とする。P_i の1つを原点 O ととり，残りの P_i を

$$P_1, \cdots, P_r \in \Gamma(K) \subset J(K), \quad r = m^2 - 1$$

とかく。しからば，"Mordell-Weil 群" $J(K)$ は，rank r の free abel 群で，上の r コの点 P_i は独立，かつ $J(K)$ の index m の部分群を生成する。$J(K)$ 自身は，これら P_i と，$mQ = \sum_i P_i$ をみたす $Q \in J(K)$ により生成される。」

この結果は，MWL 式に定式化した次の Th. から従う。

Th.10　MWL $J(K)$ は，rank $r = m^2 - 1$ の，pos-def. integral, unimodular lattice であり，m が奇数の時かつその時に限って even である。$P_1, \cdots, P_r$ は

$$\langle P_i . P_j \rangle = \begin{cases} 2 & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases} \qquad (i, j \geq 1)$$

従って，$\det(\langle P_i, P_j \rangle) = m^2 \ (\neq 0)$，を満す独立な有理点で，index m の sublattice を生成する。

証明は [S9] 参照.

文献

[L] Lang, S.: Fundamentals of Diophantine Geometry, Springer (1983)

[M1] Manin, Ju.: Cubic Forms, North-Holland (1974)

[M2] ——: The Tate height of points ....., Izv. Akad. Nauk SSSR. 28 (1964); AMS Transl. (2) 59, 82–110 (1966).

[S1] Shioda, T.: Mordell-Weil lattices and Galois representation, I, II, III, Proc. Japan Acad. 65A, 268–271, 296–299, 300–303 (1989)

[S2] ——: On the Mordell-Weil lattices, Comment. Math. Univ. St. Pauli 39, 211–240 (1990)

[S3] ——: Theory of Mordell-Weil lattices Proc. ICM'90 Kyoto, Springer. I, 473–489 ('91)

[S4] ——: MWLの理論と応用, 数学 43, 97–114 ('91)

[S5] ——: An infinite family of elliptic curves over Q ...., Invent. Math. 106, 109–119 (1991).

[S6] ——: Mordell-Weil lattices for higher genus fibration, Proc. Japan Acad. 68A, 247–250 (1992) ~~(to appear)~~.

[S7] ——: Generalization of a theorem of Manin-Shafarevich, (to appear).

[S8] Shioda, Construction of elliptic curves with high rank via the invariants of the Weyl groups, J. Math. Soc. Japan 43, 673–719 (1991).

12/30/92.